View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 530.12
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-319-324

Поступила в редакцию 02.09.2019
Received 02.09.2019

Ю. А. Курочкин

Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ОПИСАНИЕ СВОБОДНОЙ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. Квантово-механическая задача о движении свободной частицы в трехмерном пространстве Лобачевского интерпретируется как рассеяние пространством. Квантовый случай рассматривается на основе интегрального уравнения, выведенного из уравнения Шредингера. Работа продолжает рассмотренную в [1] задачу, исследованную в рамках классической механики и на основе решения уравнения Шредингера в квазидекартовых координатах. В предлагаемом исследовании также используется квазидекартова система координат, однако после разделения переменных для движения вдоль оси симметрии орисферы, совпадающей с осью z, выводится интегральное уравнение. Устанавливается связь амплитуды рассеяния с аналитическими функциями. Метод последовательных приближений и конечно-разностный метод решения полученного уравнения предлагаются.

Ключевые слова: Лобачевского пространство, орисфера, координаты, Шредингера уравнение, рассеяние, амплитуда рассеяния, аналитическое представление, метод, итерации, конечные разности

Для цитирования. Курочкин, Ю. А. Описание свободной квантово-механической частицы в пространстве Лобачевского на основе интегрального уравнения / Ю. А. Курочкин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 319–324. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-319-324

Yu. A. Kurochkin

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

DESCRIPTION OF A FREE QUANTUM-MECHANICAL PARTICLE IN THE LOBACHEVSKY SPACE BASED ON THE INTEGRAL EQUATION

Abstract. The quantum mechanical problem of the motion of a free particle in the three-dimensional Lobachevsky space is interpreted as space scattering. The quantum case is considered on the basis of the integral equation derived from the Schrödinger equation. The work continues the problem considered in [1] studied within the framework of classical mechanics and on the basis of solving the Schrödinger equation in quasi-Cartesian coordinates. The proposed article also uses a quasi-Cartesian coordinate system; however after the separation of variables, the integral equation is derived for the motion along the axis of symmetry horosphere axis coinciding with the z axis. The relationship between the scattering amplitude and the analytical functions is established. The iteration method and finite differences for solution of the integral equation are proposed.

Keywords: Lobachevsky space, horosphere, coordinates, Schrödinger equation, scattering, scattering amplitude, analytical presentation, method, iterations, finite differences

For citation. Kurochkin Yu. A. Description of a free quantum-mechanical particle in the Lobachevsky space based on the integral equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 319–324 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-319-324

Введение. В работе [1] движение классической и квантово-механической свободной частицы в трехмерном пространстве Лобачевского интерпретировалось как рассеяние самим пространством. При этом решение квантово-механической задачи основывалось на точном решении уравнения Шредингера в конфигурационном пространстве в квазидекартовых координатах, суще-

© Курочкин Ю. А., 2019

ственно связанных с орисферами [2]. Ниже та же квантово-механическая задача будет решена с помощью обычного Фурье-преобразования исходного уравнения.

Отметим, что чаще всего под преобразованием Фурье в пространстве Лобачевского понимают преобразование Шапиро [3] или преобразование Гельфанда – Граева [4], что, фактически, одно и то же (см. также [5]). Нами будет использовано обычное преобразование Фурье, что приводит в конечном итоге к формулировке одномерного интегрального уравнения для составляющей импульса вдоль оси симметрии орисферы после разделения переменных. Учитывая значительное удобство использования интегральных уравнений в теории рассеяния, таких как, например, уравнение Липпмана – Швингера (см. напр. [6]), уравнение Логунова – Тавхелидзе – Кадышевского [7] и других, особое внимание уделим анализу движения частицы в пространстве Лобачевского на основе полученного ниже интегрального уравнения.

Отметим также, что задача о распространении электромагнитных волн и частиц рассматривалась в работах [8–10], в которых был установлен эффект «зеркала» – отражения волн и частиц при определенных условиях распространения. Эффект объясняется тем, что в направлении распространения волн (частиц) пространство имитирует неоднородную среду, тормозящую их распространение и в конечном итоге приводящее к остановке и отражению волн.

Квантово-механическая задача. Вывод интегрального уравнения. Рассмотрим движение свободной квантово-механической частицы в трехмерном пространстве Лобачевского как рассеяние. Для этого, стартуя от уравнения Шредингера в казидекартовых координатах на орисфере, сформулируем задачу для интегрального уравнения.

Уравнение Шредингера в квазидекартовых координатах трехмерного пространства Лобачевского, задаваемых бесконечно малым интервалом

$$dl^2 = \rho^2[e^{-2z}(dx^2 + dy^2) + dz^2], \tag{1}$$

имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\psi, \tag{2}$$

где гамильтониан равен

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m\rho^2}\left[\mathrm{e}^{2z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \mathrm{e}^{2z}\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{e}^{-2z}\frac{\partial}{\partial z}\right]. \tag{3}$$

Будем рассматривать стационарную задачу на собственные значения для гамильтониана (3)

$$H\Psi = E\Psi, \tag{4}$$

которая, с учетом явного вида гамильтониана (3), может быть представлена как

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{e}^{-2z}\frac{\partial}{\partial z}\right]\Psi(x, y, z) = \mathrm{e}^{-2z}k^2\Psi(x, y, z), \tag{5}$$

где $k^2 = -\dfrac{2mE\rho^2}{\hbar^2}$.

Задача (4) с гамильтонианом (3) допускает разделение переменных

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\chi(x, y) = k_\perp^2\chi(x, y), \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}e^{-2z}\frac{\partial}{\partial z}w(z) = \left(k^2 e^{-2z} - k^2\right)w(z). \tag{7}$$

Здесь введены обозначения $\Psi(r,\varphi,z)=\chi(r,\varphi)w(z)$.

Уравнение (7) для наших целей удобно представить в следующем виде:

$$\frac{d^2w}{dz^2}-2\frac{dw}{dz}-(k^2-1)w=-k_\perp{}^2e^{2z}w, \tag{8}$$

или в результате стандартного преобразования после исключения первой производной

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)\varphi=-k_\perp{}^2e^{2z}\varphi. \tag{9}$$

Далее, совершив Фурье-преобразование

$$\varphi(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\varphi}(p_z)e^{ip_zz}\frac{dp_z}{\sqrt{\pi}}$$

в уравнении (9), будем иметь

$$\tilde{\varphi}(p_z)=\frac{k_\perp{}^2}{-p_z{}^2-k^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{\varphi}(p_z')dp_z'}{p_z'-p_z-2i}. \tag{10}$$

Уравнение (10) позволяет проанализировать условия возникновения связанных состояний (существования дискретного спектра) в расширенном пространстве Лобачевского, а также описать рассеяние под действием эффективного потенциала, возникающего в пространстве Лобачевского, понимаемого как изменение p_z. Зависимость $p_z=\sqrt{k^2-k_\perp{}^2e^{2z}}$ от z следует, в частности, из решения уравнения Гамильтона – Якоби, приведенного в [1].

Для случая рассеяния уравнение (10) примет вид

$$\tilde{\varphi}(p_z)=\delta(p_z-k_z)+\frac{k_\perp{}^2}{-p_z{}^2-k^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{\varphi}(p_z')dp_z'}{p_z'-p_z-2i}. \tag{11}$$

Анализ интегрального уравнения и его решения. Как известно, связанные состояния определяются полюсами волновой функции в комплексной плоскости значений p_z, соответствующих отрицательным значениям энергии. В данном случае предынтегральное выражение во втором слагаемом формулы (11) определяет функцию Грина уравнения (9), из него видно, что имеет место полюс при значениях энергии

$$E=\frac{\hbar^2p_z{}^2}{2m\rho^2}. \tag{12}$$

Из выражения (12) видно, что E может принимать отрицательные значения только в пространстве положительной кривизны, что реализуемо лишь в мнимом пространстве Лобачевского (в трехмерном пространстве Де-Ситтера).

Развиваемый подход применим к описанию движения квантво-механической частицы в данном пространстве при аналогичных начальных условиях. Достаточно в (1) произвести замену $\rho^2\to-\rho^2$. Использование других методов подтверждает наличие дискретной части спектра состояний в мнимом пространстве Лобачевского несмотря на некомпактность данного пространства.

Задачу рассеяния, используя уравнение (11), будем решать методом итераций. Для этого подставим исходную плоскую волну $\delta(p_z-\kappa)$, соответствующую нулевому приближению во второе слагаемое, и получим первое (борновское) приближение

$$\tilde{\varphi}(p_z) = \delta(p_z - \kappa) + \frac{k_\perp^{\,2}}{p_z^{\,2} - k^2} \frac{1}{\kappa - p_z - 2i}. \tag{13}$$

Отметим, что здесь к – модуль волнового вектора плоской волны, удовлетворяющей уравнению (9) без правой части, падающей из бесконечности. Принимаем – данный волновой вектор к направлен вдоль оси z пучка классической задачи. Матричный элемент амплитуды рассеяния в выражении (13) равен

$$M_{\kappa \to p_z} = \frac{1}{\kappa - p_z - 2i}. \tag{14}$$

Последующие итерации дают нулевой вклад.

Аналитическое представление амплитуды рассеяния. Как известно [11], для функции, удовлетворяющей условию квадратичной интегрируемости на всей числовой оси

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi(p_z)\right|^2 dp_z \prec \infty,$$

имеет место аналитическое представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}(p_z{}')dz}{p_z{}' - z}. \tag{15}$$

Тогда интеграл в выражении (10), очевидно, является частным случаем интеграла (15), а соответствующая аналитическая функция в данном случае имеет постоянное (фиксированное) значение мнимой части аргумента, т. е. $\operatorname{Im} z = 2i.$ С учетом сказанного уравнение (10) принимает вид

$$\tilde{\varphi}(p_z) = \frac{2\pi i k_\perp^{\,2}}{-p_z^{\,2} - k^2} f(p_z + 2i). \tag{16}$$

Выражение (16) удобно решать, используя конечные разности. Действительно, примем $p_z = 0$, тогда получим

$$\tilde{\varphi}(0) = \frac{2\pi i k_\perp^{\,2}}{-k^2} f(2i). \tag{17}$$

Будем считать $\tilde{\varphi}(0)$ заданным граничным значением и будем сдвигать действительную часть аргумента на малую конечную величину δ, $\delta \ll 1$. Далее рассмотрим следующий шаг, когда

$$\tilde{\varphi}(\delta) = \frac{2\pi i k_\perp^{\,2}}{-\delta^2 - k^2} f(\delta + 2i).$$

Разлагая $f(\delta + 2i)$ в ряд Тейлора, по δ с учетом соотношений Коши – Римана получим, что

$$f(\delta + 2i) = f(2i),$$

т. е.

$$\tilde{\varphi}(\delta) = \frac{2\pi i k_\perp^{\,2}}{-\delta^2 - k^2} f(2i).$$

Продолжая итерации, легко убедиться, что

$$\tilde{\varphi}(n\delta) = \frac{2\pi i k_\perp{}^2}{-n^2\delta^2 - k^2} f(2i), \tag{18}$$

где n – целое число, номер итерации. Заменив в (18) $f(2i)$, согласно формуле (17) окончательно получим

$$\tilde{\varphi}(n\delta) = \frac{k^2}{n^2\delta^2 + k^2} \tilde{\varphi}(0).$$

Таким образом, рассмотрена квантово-механическая задача о движении свободной частицы в трехмерном пространстве Лобачевского, интерпретируемом как рассеяние. Задача исследуется на основе интегрального уравнения, выведенного из уравнения Шредингера. Работа продолжает начатое в [1] исследование, однако, в отличие от него, в данном варианте после разделения переменных для движения вдоль оси симметрии орисферы, совпадающей с осью z, выводится интегральное уравнение. Устанавливается связь амплитуды рассеяния с аналитическими функциями. Рассмотрены два метода решения выведенного уравнения: метод последовательных приближений и конечно-разностный метод. Предлагаемый подход планируется использовать в физике частиц и космологии.

Благодарности. Автор выражает благодарность В. М. Редькову за полезные замечания и участникам семинара центра «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика» Института физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси за плодотворное обсуждение работы.

Acknowledgements. The author is grateful to Doctor V. M. Redkov for useful comments and the participants of the seminar of the Center «Fundamental Interactions and Astrophysics» of the B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus for valuable discussion of the work.

Список использованных источников

1. Курочкин, Ю. А. Интерпретация свободного движения в пространстве Лобачевского в терминах теории рассеяния / Ю. А. Курочкин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 3. – С. 49–55.
2. Олевский, М. Н. Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение $\Delta_2 U_2 + \lambda U = 0$ допускает полное разделение переменных / М. Н. Олевский // Мат. сб. – 1950. – Т. 27. – С. 379–426.
3. Шапиро, И. С. Разложение волновой функции по неприводимым представлениям группы Лоренца / И. С. Шапиро // Докл. Акад. наук СССР. – 1956. – Т. 106. – С. 647.
4. Гельфанд, И. М. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений / И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин. – М.: Физматгиз, 1962. – 656 с.
5. Виленкин, Н. Я. Инвариантные разложения релятивистских амплитуд / Н. Я. Виленкин, Я. А. Смородинский // ЖЭТФ. – 1964. – Т. 46. – С. 1793–1808.
6. Ву, Т. Ю. Квантовая теория рассеяния // Т. Ю. Ву, Т. О. Омура. – М.: Наука, 1969. – 451 с.
7. Кадышевский, В. Г. Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел // В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1971. – Т. 2, вып. 3. – С. 636–690.
8. Овсиюк, Е. М. Точно решаемые задачи квантовой механики и классической теории поля в пространствах с неевклидовой геометрией / Е. М. Овсиюк. – Минск: РИВШ, 2013. – 406 с.
9. Ovsiyuk, E. M. On Simulating a Medium with Special Reflecting Properties by Lobachevsky Geometry // E. M. Ovsiyuk, O. V. Veko, V. M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2013. – Vol. 16, № 4. – P. 331–344.
10. Овсиюк, Е. М. О моделировании потенциального барьера в теории Шредингера геометрией пространства Лобачевского / Е. М. Овсиюк, О. В. Веко // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 30–37.
11. Бремерман, Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье / Г. Бремерман. – М.: Мир, 1968. – 276 с.

References

1. Kurochkin Yu. A. Interpretation of the free motion of particles in the Lobachevsky space in the term of the scattering theory. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series,* 2017, no. 3, pp. 49–55 (in Russian).
2. Olevskii M. N. Triorthogonal systems in spaces of constant curvature in which the equation $\Delta_2 U_2 + \lambda U = 0$ allows a complete separation of variables. *Matematicheskii Sbornik = Sbornik: Mathematics*, 1950, vol. 27, pp. 379–426 (in Russian).
3. Shapiro I. S. Decomposition of the wave function on irreducible represantations of the Lorentz groop. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1956, vol. 106, pp. 647 (in Russian).

4. Gelfand I. M., Graev M. I., Vilenkin N. Ya. *Integral geometry in a space of constant curvature*. Academic Press, 1966. https://doi.org/10.1016/b978-1-4832-2975-1.50010-0

5. Vilenkin N. Ya., Smorodinskii Ya. A. Invariant decomposition relativistic amplitude. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1964, vol. 46, pp. 1793–1808 (in Russian).

6. Ta Yu Vu, Takashi Ohmura. *Quantum Theoryof Scattering*. Prentice-Hole INC., 1962.

7. Kadyshevskii V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B. Three dimensional formulation of the relativistic two body problem. *Fizika elementarnykh chastits i atomnogo yadra = Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei*, 1972, vol. 2, no. 3, pp. 635–690 (in Russian).

8. Ovsiyuk E. M. *Exactly solved problems quantum mechanics and classical theory of the field in space with non-Euclidean geometry*. Minsk, Republican Institute of Higher Education, 2013. 406 p. (in Russian).

9. Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Red'kov V. M. On Simulating a Medium with Special Reflecting Properties by Lobachevsky Geometry. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2013, vol. 16, no. 4, pp. 331–344.

10. Ovsiyuk E. M., Veco O. V. About modeling of the potential barrier in the Shcredinger theory by Lobachevsky space geometry. *Vestnic Brestskogo universiteta. Seriya 4, Fizika. Matematika = Brest University Herald. Seriya 4, Physics. Mathamatics*, 2011, no. 2, pp. 30–37 (in Russian).

11. Bremerman H. *Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms*. Readding, Messachusetts, Addison-Wealey Pablishing Company, 1965. 276 p.

Информация об авторе

Курочкин Юрий Андреевич – доктор физико-математических наук, заведующий центром «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика» Института физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by

Information about the author

Yurii A. Kurochkin – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Center of the Center «Fundamental Interactions and Astrophysics», B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by